

## Logaritmos y ecuaciones logarítmicas

### **logaritmos**

#### - Introducción

supongamos que tenemos un número cualquiera, por ejemplo, el 2, y que queremos averiguar a cuanto debemos elevarlo para conseguir otro, por ejemplo el 16; ésto lo escribiríamos así:

$$2^x = 16$$

ese número desconocido,  $x$ , se denomina "logaritmo en base 2 del número 16", y la manera de escribirlo es la siguiente:

$$x = \log_2 16$$

#### - Definición

se denomina logaritmo en base  $a$  de un número  $b$  a otro número  $x$  al que hay que elevar  $a$  para obtener  $b$ ; ésto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$

$a$  se denomina "base" del logaritmo;  
debe ser un número distinto de cero,  
y, en este curso, positivo;

#### - Ejemplos

**1)** Hallar el logaritmo en base 3 de 27.

Este problema consiste en calcular el número al que hay que elevar 3 para obtener 27; ésto lo podemos escribir así:

$$\log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x = 3, \text{ ya que } 3^3 = 27$$

**2)** Hallar el logaritmo en base 2 de 64.

Aquí se trata de calcular a qué número hay que elevar 2 para que nos de 64; lo escribimos de la siguiente manera:

$$\log_2 64 = x \Rightarrow 2^x = 64 \Rightarrow x = 6, \text{ ya que } 2^6 = 64$$

**3)** Hallar el logaritmo en base 10 de 1000.

¿A qué número hay que elevar 10 para obtener 1000?

$$\log_{10} 1000 = x \Rightarrow 10^x = 1000 \Rightarrow x = 3, \text{ ya que } 10^3 = 1000$$

### Ejercicio:

Calcula los siguientes logaritmos:

$\log_2 2 =$	$\log_3 9 =$	$\log_5 125 =$	$\log_4 64 =$
$\log_5 25 =$	$\log_3 81 =$	$\log_2 16 =$	$\log_7 49 =$
$\log_{10} 10000 =$	$\log_{15} 225 =$	$\log_6 216 =$	$\log_2 32 =$

### **propiedades de los logaritmos**

**1)** No se pueden calcular los logaritmos de números negativos (ya que antes dijimos que este curso sólo estudiaríamos logaritmos de base positiva);

Imaginemos que queremos hallar  $\log_2(-16)$ ; ésto supone buscar un número que cumpla que 2 elevado a él de -16; sin pensar mucho podríamos decir: el -4; pero ¿es ésto correcto? comprobémoslo:

$$\log_2(-16) = -4 \Rightarrow 2^{-4} = -16, \text{ pero por las propiedades de las potencias sabemos que } 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625, \text{ que, claramente, no es } -16;$$

en general, **es imposible conseguir un número negativo a partir de uno positivo elevándolo a otro**, por ello no se pueden calcular los logaritmos de los números negativos;

**2)** El logaritmo de 1 en cualquier base vale 0:  $\log_a 1 = 0$

ya que, en las condiciones que establecimos al principio, se cumple  $a^0=1$ ;

$$\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

- Ejemplos:

$$\log_2 1 = 0 \text{ ya que } 2^0=1$$

$$\log_{10} 1 = 0 \text{ ya que } 10^0=1$$

**3)**  $\log_a a^b = b$

esta propiedad es muy simple: ¿a qué número debemos elevar  $a$  para obtener  $a^b$ ? a  $b$

- Ejemplos:

$$\log_2 2^5 = 5; \text{ ¿a qué número debemos elevar 2 para obtener } 2^5? \text{ a } 5$$

$$\log_3 3^7 = 7; \text{ ¿a qué número debemos elevar 3 para obtener } 3^7? \text{ a } 7$$

observemos que esta propiedad nos permite también convertir un número cualquiera en un logaritmo:

ejemplos:

convierte 3 en un logaritmo de base 5:  $3 = \log_5 5^3$

convierte 7 en un logaritmo de base 10:  $7 = \log_{10} 10^7$

convierte -4 en un logaritmo de base 2:  $-4 = \log_2 2^{-4}$

**4) El logaritmo de cero es:**

$-\infty$  si  $a$  es mayor que 1

$+\infty$  si  $a$  es un número comprendido entre cero y uno

-Ejemplos:

$$\log_5 0 = -\infty$$

$$\log_2 0 = -\infty$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 0 = \infty$$

en cualquier caso, como infinito no es un número real, también podemos decir que **el logaritmo de cero no tiene solución real**, lo que, para nosotros, equivale a que no se puede calcular;

### Ejercicios

1) Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

$\log_2 1 =$	$\log_4(-1) =$	$\log_5 1 =$	$\log_3(-2) =$
$\log_3 3^5 =$	$\log_7 7^{-2} =$	$\log_4 4^{-3} =$	$\log_{10} 10^4 =$
$\log_{10} 1 =$	$\log_6(-5) =$	$\log_6 6^{10} =$	$\log_8 1 =$

2) Convierte los siguientes números en logaritmos:

4 en logaritmo de base 3

7 en logaritmo de base 5

6 en logaritmo de base 10

-9 en logaritmo de base 2

-6 en logaritmo de base 7

$\frac{1}{2}$  en logaritmo de base 4

$\frac{2}{5}$  en logaritmo de base 6

### operaciones con logaritmos

$$1) \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$3.1. \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$$

$$3.2. \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{y}{z} \cdot \log_a x$$

(las propiedades 3.1 y 3.2 se deducen de la propiedad 3)

- Ejemplos:

$$1) \log_2(5 \cdot 10) = \log_2 5 + \log_2 10$$

$$2) \log_3(17 : 4) = \log_3 17 - \log_3 4$$

$$3) \log_5 7^3 = 3 \cdot \log_5 7$$

$$3.1. \log_4\left(\frac{1}{5}\right) = -\log_4 5$$

$$3.2. \log_7 \sqrt[4]{2^5} = \frac{5}{4} \cdot \log_7 2$$

El uso de estas operaciones es necesario para la resolución de ecuaciones logarítmicas y de los problemas relacionados con ellas; junto con las propiedades anteriores podemos hacer una tabla resumen con las características fundamentales de los logaritmos.

### tabla resumen de propiedades y operaciones

no existen logaritmos de números negativos

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^b = b$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x : y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$$

$$\log_a \sqrt[y]{x} = \frac{y}{z} \cdot \log_a x$$

## ecuaciones logarítmicas

Son aquellas que verifican que la incógnita o incógnitas aparecen en el interior de un logaritmo. Su resolución es sencilla: aplicamos las propiedades de los logaritmos ("comprimiendo" las expresiones que aparezcan) hasta lograr una igualdad de logaritmos de este tipo:

$$\log (\text{expresión algebraica 1})=\log (\text{expresión algebraica 2})$$

lo cual conduce a:

$$\text{expresión algebraica 1} = \text{expresión algebraica 2}$$

En este curso esta igualdad dará como resultado una ecuación de primer o segundo grado. Puede darse el caso de que tengamos un sistema de ecuaciones logarítmicas. Si ocurre ésto, al resolverlo de la manera indicada antes, obtendremos un sistema de ecuaciones (ya vistas el curso anterior).

- Ejemplos:

$$1) \log (x+1)-\log x=3$$

*primer paso:* aplicando las propiedades convertimos la resta de logaritmos en el logaritmo de la división:

$$\log \left( \frac{x+1}{x} \right) = 3$$

*segundo paso:* el 3 de la parte derecha de la igualdad debe aparecer dentro de un logaritmo decimal; por las propiedades sabemos que  $3=\log 10^3$ , con lo cual:

$$\log \left( \frac{x+1}{x} \right) = \log 10^3$$

*tercer paso:* sólo nos queda igualar la expresión que hay en el logaritmo de la izquierda con la expresión que hay en el logaritmo de la derecha, y resolver la ecuación resultante:

$$\frac{x+1}{x} = 10^3 \Rightarrow x+1 = 1.000x \Rightarrow x - 1000x = -1 \Rightarrow -999x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{999}$$

$$2) \log(x+9) + \log x = 1$$

- *primer paso*: aplicando las propiedades convertimos la suma de logaritmos en el logaritmo del producto:

$$\log[(x+9) \cdot x] = 1$$

- *segundo paso*: el 1 de la parte derecha de la igualdad debe aparecer dentro de un logaritmo decimal; por las propiedades sabemos que  $1 = \log 10^1$ , con lo cual:

$$\log[(x+9) \cdot x] = \log 10^1$$

- *tercer paso*: sólo nos queda igualar la expresión que hay en el logaritmo de la izquierda con la expresión que hay en el logaritmo de la derecha, y resolver la ecuación resultante:

$$x \cdot (x+9) = 10^1 \Rightarrow x^2 + 9x = 10 \Rightarrow x^2 + 9x - 10 = 0$$

En este caso hemos obtenido una ecuación de 2º grado (en el ejemplo anterior era de 1º grado). La resolvemos empleando la fórmula que ya conocemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-9 + 11}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-9 - 11}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

La segunda solución no es válida, ya que, como sabemos, los logaritmos de números negativos no son números reales.

Solución:  $x=1$